整数环上的矩阵性质

1900013053 吕昆航 信息科学技术学院

2020 年 4 月 13 日

目录

§1　整数矩阵

定义 1. 如果整数矩阵 A 中有一个 $r(r \geq 1)$ 级子式不为零，而所有 $r+1$ 级子式（如果有的话）全为零，则称 A 的秩为 r. 零矩阵的秩规定为零.

定义 2. 一个 $n*n$ 的整数矩阵 A 称为在整数环可逆的（下简记为可逆的），如果有一个 $n*n$ 的整数矩阵 B 使

$$AB = BA = E \tag{1}$$

这里 E 是 n 级单位矩阵. 适合 (1) 的矩阵 B（它是唯一的）称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

定理 1. 一个 $n*n$ 的整数矩阵 A 是可逆的充分必要条件为行列式 $|A|$ 是 ± 1.

证明. 有 A 在整数环上可逆，则存在整数矩阵 B 满足

$$AB = BA = E, |AB| = |E| = 1$$

而

$$|AB| = |A| \cdot |B| = 1, |A| \in Z, |B| \in Z$$

因此 $|A| = \pm 1$.
若 $|A| = \pm 1$，则 A 在实数域 R 上可逆，且

$$A^{-1} = \pm A^*$$

由于 A 为整数矩阵，所以 A^* 为整数矩阵，从而 A^{-1} 为整数矩阵，即 A 在整数环可逆. □

§2　整数矩阵在初等变换下的标准形

定义 3. 下面三种变换叫做整数矩阵的初等变换：

1) 矩阵的两行（列）互换位置；

2) 矩阵的某一行（列）乘常数 -1；

3) 矩阵的某一行（列）加另一行（列）的 k 倍，k 为整数.

定义 4. 整数矩阵 A 称为与 B 等价，如果可以通过一系列初等变换将 A 化为 B.

引理. 设整数矩阵 A 的左上角元素 $a_{11} \neq 0$，并且 A 中至少有一个元素不能被它除尽，那么一定可以找到一个与 A 等价的矩阵 B，他的左上角元素也不为零，但是绝对值小于 a_{11}.

证明. 根据 A 中不能被 a_{11} 除尽的元素所在位置，分三种情况讨论：

1) 若在 A 的第一列中有一个元素 a_{11} 除尽，则有

$$a_{i1} = a_{11}q + r,$$

其中余数 $r \neq 0$，且小于 a_{11}.
对 A 作初等变换. 把 A 的第 i 行减去第一行的 q 倍，得

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

再将此矩阵的第一行与第 i 行互换得，

$$A \to \begin{pmatrix} r & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B.$$

B 的左上角元素 r 符合引理的要求，故 B 即为所求矩阵.

2) 在 A 的第一行中有一个元素 a_{1i} 不能被 a_{11} 除尽，这种情况的证明与 1) 类似，但是对 A 进行的是初等列变换.

3) A 的第一行与第一列中的元素都可被 a_{11} 除尽，但 A 中有另一个元素 $a_{ij}(i > 1, j > 1)$ 不能被 a_{11} 除尽. 我们设 $a_{i1} = ka_{11}$. 对 A 作下述初等

变换:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{ij}-ka_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{ij}+(1-k)a_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{ij}-ka_{1j} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\end{pmatrix}=A_1.$$

矩阵 A_1 的第一行中，有一个元素

$$a_{ij}+(1-k)a_{1j}$$

不能被左上角元素 a_{11} 除尽，这就化为已经证明了的情况 2).

□

定理 2. 任意一个非零的 $s*n$ 的整数矩阵 A 都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix}d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix},$$

其中 $r\geq 1, d_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为正整数，且

$$d_i \mid d_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,r-1).$$

证明. 经过行列调动之后，可以使得 A 的左上角元素 $a_{11}\neq 0$，如果 a_{11} 不能除尽 A 的全部元素，由引理，可以找到与 A 等价的 B_1，它的左上角元素 $b_1\neq 0$，并且小于 a_{11}. 如果 b_1 还不能除尽 B_1 的全部元素，由引理，又可以找到与 B_1 等价的 B_2，它的左上角元素 $b_2\neq 0$，并且小于 b_1. 如此下

去，将得到一系列彼此等价的整数矩阵，$A, B_1, B_2, \cdots$. 它们的左上角元素都不为零，而且依次减小. 但由于其为正整数，不能无止境减小，且 1 能乘除所有数. 因此在有限步以后，我们将终止于一个整数矩阵 B_s，它的左上角元素 $b_s \neq 0$，而且可以除尽 B_s 的全部元素 b_{ij}，即

$$b_{ij} = b_s q_{ij},$$

对 B_s 作初等变换:

$$B_s = \begin{pmatrix} b_s & \cdots & b_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

在右下角的整数矩阵 A_1 中，全部元素都是可以被 b_s 除尽的，因为它们都是 B_s 中元素的组合.
如果 $A_1 \neq O$，则对于 A_1 可以重复上述过程，进而把矩阵化成

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & A_2 & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

其中 d_1 与 d_2 都是正整数，而且 $d_1 \mid d_2$，d_2 能除尽 A_2 的全部元素.
如此下去，A 最后就化成了所要求的形式. □

最后化成的这个矩阵称为 A 的标准形.

§3 不变因子

定义 5. 设整数矩阵 A 的秩为 r，对于正整数 $k, 1 \leq k \leq r$，A 中必有非零的 k 级子式. A 中全部 k 级子式的最大公因数 D_k 称为 A 的 k 级行列式因子.

定理 3. 等价的整数矩阵具有相同的秩与相同的各级行列式因子.

证明. 我们只需要证明，整数矩阵经过一次初等变换，秩与行列式因子是不变的.

设整数矩阵 A 经过一次初等行变换变成 B，p,q 分别为 A 与 B 的 k 级行列式因子. 我们证明 $p=q$. 下面分三种情况讨论：

1) A 经过第一种初等行变换变成 B. 这时，B 的每一个 k 级子式或者等于 A 的某个 k 级子式，或者与 A 的某一个 k 级子式反号，因此 p 是 B 的 k 级子式的公因子，从而 $p \mid q$.

2) A 经过第二种初等行变换变成 B. 这时，B 的每一个 k 级子式或者等于 A 的某个 k 级子式，或者与 A 的某一个 k 级子式反号，同理可得 $p \mid q$.

3) A 经过第三种初等行变换变成 B. 这时 B 中那些包含 i 行与 j 行的 k 级子式和那些不包含 i 行的 k 级子式都等于 A 中对应的 k 级子式；B 中那些包含 i 行但不包含 j 行的 k 级子式，按 i 行分成两部分，而等于 A 的一个 k 级子式与另一个 k 级子式的 $\pm c$ 倍的和，也就是 A 的两个 k 级子式的组合. 因此 p 是 B 的 k 级子式的公因子，从而 $p \mid q$.

对于列变换，可以完全一样地讨论. 总之，如果 A 经过一次初等变换变成 B，那么 $p \mid q$. 但由于初等变换的可逆性，B 也可以经过一次初等变换变成 A. 由上面的讨论，同样应有 $q \mid p$，于是 $p=q$.

当 A 的全部 k 级子式为零时，B 的全部 k 级子式也就等于零；反之亦然. 因此，A 与 B 既有相同的各级行列式因子，又有相同的秩. □

定理 4. 整数矩阵的标准形是唯一的.

证明. 设

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

是 A 的标准形. 由于 A 与 (1) 等价，它们有相同的秩与相同的行列式因子，因此，A 的秩就是标准形的主对角线上非零元素的个数 r；A 的 k 级行列式

因子就是

$$D_k = d_1 d_2 \cdots d_k \ (k = 1, 2, \cdots, r). \tag{2}$$

于是

$$d_1 = D_1, d_2 = \frac{D_2}{D_1}, \cdots, d_r = \frac{D_r}{D_{r-1}}. \tag{3}$$

这说明 A 的标准形 (1) 的主对角线上的非零元素是被 A 的行列式因子所唯一确定的，所以 A 的标准形是唯一的. □

定义 6. 标准形的主对角线上的非零元素 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 称为整数矩阵 A 的不变因子.

定理 5. 两个整数矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者，它们有相同的不变因子.

证明. 等式 (2) 与 (3) 给出了整数矩阵的行列式因子与不变因子之间的关系. 这个关系说明，行列式因子与不变因子是相互确定的. 因此，说两个矩阵有相同的各级行列式因子，就等于说它们有相同的各级不变因子.

必要性已有定理 3 证明.

充分性是很显然的. 事实上，若整数矩阵 A 与 B 有相同的不变因子，则 A 与 B 和同一标准形等价，因而 A 与 B 等价. □

定理 6. 矩阵 A 是可逆的充分必要条件是它可以表示成一些初等矩阵的乘积.

证明. 设 A 为一个 $n * n$ 可逆矩阵，由定理 1 知 $|A| = \pm 1$，这就是说，$D_n = 1$. 从而可知，$d_k = 1 \ (k = 1, 2, \cdots, n)$. 因此可逆矩阵的标准形为单位矩阵 E. 反过来，与单位矩阵等价的矩阵一定是可逆的，因为他的行列式是一个非零的数. 这就是说，矩阵可逆的充分必要条件是它与单位矩阵等价. 又矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是有一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l B Q_1 Q_2 \cdots Q_t$$

. 特别地，当 $B = E$ 时，定理成立. □

推论 6.1. 两个 $s * n$ 的整数矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件为，有一个 $s * s$ 可逆矩阵 P 与一个 $n * n$ 可逆矩阵 Q，使

$$B = PAQ.$$

§4 初等因子

定义 7. 把矩阵 A（或线性变换 $\mathscr{A}$）的每个次数大于零的不变因子分解成互素的质因子方幂的乘积，所有这些质因子方幂称为矩阵 A 的初等因子.

定理 7. 两个的整数矩阵等价的充分必要条件是它们有相同秩和相同的初等因子.

证明. 若两个整数矩阵等价，则它们存在相同的不变因子，因此，它们有相同秩和相同的初等因子.

假设矩阵 A 的不变因子已知，将 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 分解成质因子方幂的乘积:

$$\begin{aligned}d_1&=p_1^{k_{11}}p_2^{k_{12}}\cdots p_r^{k_{1r}},\\ d_2&=p_1^{k_{21}}p_2^{k_{22}}\cdots p_r^{k_{2r}},\\ &\cdots\cdots\\ d_n&=p_1^{k_{n1}}p_2^{k_{n2}}\cdots p_r^{k_{nr}},\end{aligned}$$

我们注意到

$$d_i \mid d_{i+1},$$

从而

$$p_j^{k_{ij}} \mid p_j^{k_{i+1,j}}\ (i=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,r).$$

因此在 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 分解式中，属于同一个质因子的方幂的指数有递增的性质. 这说明，同一个质因子方幂作成的初等因子中，方幂最高的必定出现在 d_n 的分解中. 如此顺推下去，可知属于同一个质因子方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的位置是唯一确定的.

设一个矩阵的全部初等因子为已知，在全部初等因子中将同一个质因子的方幂的那些初等因子按降幂排列，个数不足 n 时，就在后面补上适当个数的 1，使得凑成 n 个. 设所得排列为

$$p_j^{k_{nj}},p_j^{k_{n-1,j}},\cdots,p_j^{k_{1j}}\ (j=1,2,\cdots,r).$$

于是令

$$d_i=p_1^{k_{i1}}p_2^{k_{i2}}\cdots p_r^{k_{ir}}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

则 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 就是 A 的不变因子.

因此，若两个整数矩阵有相同的秩和初等因子，则它们就有相同的不变因子，因此他们等价. □

引理. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2b_1 & 0 \\ 0 & a_1b_2 \end{pmatrix}.$$

如果正整数 a_1, a_2 都与 b_1, b_2 互素，则 A 与 B 等价.

证明. 显然 A 和 B 有相同的二级行列式因子. 而 A 和 B 的一级行列式因子分别为

$$d = (a_1b_1, a_2, b_2)$$

和

$$d' = (a_2b_1, a_1b_2).$$

易知

$$d = (a_1, a_2)(b_1, b_2) = d',$$

因而 A 和 B 也有相同的一级行列式因子. 所以 A 与 B 等价. □

定理 8. 首先用初等变换化整数矩阵 A 为对角形式，然后将主对角线上的元素分解成互不相同的质因子方幂的乘积，则所有这些质因子的方幂（相同的按出现的次数计算）就是 A 的全部初等因子.

证明. 设整数矩阵 A 已用初等变换化为对角形式

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 均为正整数. 将 a_i 分解为互不相同的质因子方幂的乘积:

$$a_i = p_1^{k_{i1}} p_2^{k_{i2}} \cdots p_r^{k_{ir}} \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

我们现在要证明的是, 对于每个相同的质因子的方幂 $p_j^{k_{1j}}, p_j^{k_{2j}}, \cdots, p_j^{k_{nj}} (j = 1, 2, \cdots, r)$ 在 D 的主对角线上按递升幂次排列后，得到的新对角矩阵 D' 与 D 等价. 此时 D' 就是 A 的标准形而且所有不为 1 的 $p_j^{k_{ij}}$ 就是 A 的全部初等因子.

为方便起见，先对 p_1 的方幂进行讨论. 令

$$b_i = p_2^{k_{i2}} p_3^{k_{i3}} \cdots p_r^{k_{ir}}, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

于是

$$a_i = p_1^{k_{i1}} b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

而且每个 $p_1^{k_{i1}}$ 都与 b_i 互素. 如果有相邻的一对指数 $k_{i1} > k_{i+1,1}$，则在 D 中将 $p_1^{k_{i1}}$ 与 $p_1^{k_{i+1,1}}$ 对调位置，而其他因式保持不动. 根据引理，

$$\begin{pmatrix} p_1^{k_{i1}} b_i & 0 \\ 0 & p_1^{k_{i+1,1}} b_{i+1} \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} p_1^{k_{i+1,1}} b_i & 0 \\ 0 & p_1^{k_{i1}} b_{i+1} \end{pmatrix}$$

等价. 从而 D 与对角矩阵

$$D_1 = \begin{pmatrix} p_1^{k_{11}} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & p_1^{k_{i+1,1}} b_i & & & \\ & & & p_1^{k_{i1}} b_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_1^{k_{n1}} b_n \end{pmatrix}$$

等价. 然后对 D_1 作如上讨论. 如此继续进行，直到对角矩阵主对角线上元素所含 p_1 的方幂是按递升幂次排列为止. 依次对 $p_2, \cdots, p_r$ 作同样处理，最后便得到与 D 等价的对角矩阵 D'，它的主对角线上所含每个相同的质因子的方幂，都是按递升幂次排列的. □